Riemann-Lebesgue の定理

Theorem. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$ なる可測関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ に対して

$$\lim_{R\to\pm\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{iRx}dx=\lim_{R\to\pm\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos Rxdx=\lim_{R\to\pm\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin Rxdx=0$$

が成り立つ.

Proof. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の場合に被積分関数に指数関数がある場合を示す. なぜなら, $f=\Re f+i\Im f, e^{iRx}=\cos Rx+i\sin Rx$ を用いればよいからである.

まず, $f=\chi_{[a,b]}$ ($\chi_{[a,b]}$は $[a,b]$ 上の定義関数, $a,b\in\mathbb{R}$) の場合に定理が成り立つことが

$$\lim_{R\to\pm\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{iRx}dx\right|=\lim_{R\to\pm\infty}\left|\int_{a}^{b}e^{iRx}dx\right|=\lim_{R\to\pm\infty}\frac{|e^{ibR}-e^{iaR}|}{|iR|}\leq\lim_{R\to\pm\infty}\frac{2}{|R|}=0$$

より確かめられる.

次に, 単関数 $f=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{I_k}$ (I_k は有界閉区間, $a_i\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$) の場合に定理が成り立つことが定義関数のときの結果を用いると

$$\lim_{R\to\pm\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{iRx}dx\right|\leq\lim_{R\to\pm\infty}\sum_{i=1}^{n}|a_i|\frac{2}{|R|}=0$$

より確かめられる.

最後に絶対可積分な一般の $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の場合に定理が成り立つことを示す.

任意の $\varepsilon>0$ に対して, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-s(x)|dx<\varepsilon$ を満たす単関数 $s:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が存在する. よって三角不等式から

$$\begin{aligned}\limsup_{R\to\pm\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{iRx}dx\right|&=\limsup_{R\to\pm\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}s(x)e^{iRx}dx+\int_{-\infty}^{\infty}(f(x)-s(x))e^{iRx}dx\right|\\&\leq\limsup_{R\to\pm\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}s(x)e^{iRx}dx\right|+\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-s(x)|dx\\&<\varepsilon\end{aligned}$$

となる.

以上より定理が示された. ■